Matemáticas, transversalidad y género. El pensamiento matemático en el diagnóstico de enfermedades cardíacas

Angélica Moreno-Durazo*
CINVESTAV-IPN
gamoreno@cinvestav.mx

RESUMEN Compensar aspectos que producen inequidad de género en el aula de matemáticas requiere construir espacios de enseñanza y de aprendizaje desde la funcionalidad y la transversalidad del conocimiento matemático. Desde esta postura, en este artículo nos interesa analizar, a modo de ejemplo, un escenario singular de las nociones matemáticas involucradas en la explicación de situaciones de cambio y predicción. Particularmente, mostramos el uso de la variación en la interpretación de electrocardiogramas durante el diagnóstico de enfermedades cardíacas. En las consideraciones finales, narramos una experiencia con mujeres talentosas del bachillerato mexicano al tratar con dicha variación.
Palabras clave: Transversalidad, uso del conocimiento matemático, variación, género.

ABSTRACT Compensate aspects that produce gender inequality in the teaching of mathematics requires the building of spaces for teaching and learning from the functionality and transversality of mathematical knowledge. In this paper, we are interested in analyzing, as an example, a singular scenario of mathematics related to the explanation of situations of change and prediction. We show the use of variation in the interpretation of electrocardiograms during the diagnosis of cardiac diseases. In the final considerations, we narrate an educational experience with talented women from the Mexican high school when dealing with variation.
Keywords: Transversality, usage of mathematical knowledge, variation, gender.

* Angélica Moreno-Durazo, Doctora en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN), sus investigaciones se interesan en la Construcción Social del Conocimiento Matemático y el Pensamiento y Lenguaje Variacional —temática desarrollada en sus diferentes ponencias y artículos—. Referencias bibliográficas recientes:
Cantoral Ricardo, Moreno-Durazo Angélica y Caballero-Pérez Mario, "Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning", *ZDM Mathematics Education 50*, no. 1 (2018): 77-89.
Moreno-Durazo, Angélica. y Cantoral, Ricardo. "Prácticas predictivas en Medicina. Un estudio socioepistemológico de la variación" En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 31*, ed. Luis Serna y Daniela Páges, 639-647. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2018.

INTRODUCCIÓN

Una premisa generalizada de las matemáticas se refiere a su relevancia para el desarrollo humano y a la participación del pensamiento matemático en la realización de actividades profesionales, académicas o recreativas; se acepta entonces que el uso del conocimiento matemático es fundamental en una gran cantidad de situaciones. Sin embargo, en el ámbito escolar, los contextos utilizados para aludir a tal diversidad se reducen a problemas de compra–venta y de reparto, mientras que en el caso de las matemáticas avanzadas, se le confina al tratamiento de fenómenos de movimiento o propios de la optimización. En este sentido, se plantea la necesidad del cuestionamiento siguiente: ¿a qué se refiere el uso del conocimiento matemático?, más aún, ¿cuáles son los contextos situacionales en los que es usado tal conocimiento? y ¿cómo se desarrolla el pensamiento matemático?

La Socioepistemología, en tanto teoría pragmática, alude al uso del conocimiento de manera situacional —qué, quién, cómo, para qué usa—, esto es, refiere a las prácticas en las que se construye el conocimiento matemático[1] (Cantoral, 2013). Desde esta postura, Farfán y Simón (2017) muestran que la equidad de género al interior del aula de matemáticas precisa el tránsito de un modelo de enseñanza que busca la aprehensión del objeto a uno que propicie el uso, la funcionalidad y la transversalidad del conocimiento matemático. En este sentido, un reto importante para la enseñanza de las matemáticas es la conformación de escenarios con estas características. De ahí, la relevancia de conocer cuáles son los contextos situacionales en los que es usado el conocimiento matemático.

En este artículo mostramos algunos resultados de nuestra investigación, analizamos desde la transversalidad el uso de la variación en la toma de decisiones ante situaciones de cambio y predicción, es decir, la variación —como noción matemática— es un emergente del análisis del cambio con fines predictivos. Por ejemplo, para determinar nuestra ubicación al atrapar un objeto lanzado, para aproximar el tiempo de llegada a un punto de encuentro, si acudimos caminando, o bien, al cruzar una calle, es necesario comparar el cambio en la posición del objeto o la propia durante un lapso.

Particularmente, analizamos en la interpretación de electrocardiogramas[2], el uso de la variación y evidenciamos su papel primordial para diagnosticar enfermedades cardíacas. A partir de este análisis caracterizamos de qué manera el pensamiento y lenguaje variacional están presentes en la toma de decisiones en escenarios de incertidumbre, donde la evolución del cambio no sigue leyes y presenta desenlaces inesperados.

REFLEXIONES TEÓRICAS SOBRE EL ANÁLISIS DE SITUACIONES DE CAMBIO

Un aspecto esencial para el desarrollo de nuestra investigación es el posicionamiento, desde la Socioepistemología, sobre el uso del conocimiento, y la centralidad otorgada a las prácticas que significan a los objetos matemáticos formales. En este sentido, el uso de la variación emerge en situaciones de cambio mediante la comparación de dos estados, lo cual posibilita la determinación de regularidades que permiten la predicción de resultados. Así, el binomio predecir-comparar es la esencia de las formas culturales en las que los individuos se apropian de la variación matemática, bajo el pensamiento y lenguaje variacional[3]. Entonces, tal binomio es una herramienta potente para analizar el uso situacional del conocimiento matemático.

Un examen con mayor detalle sobre la variación precisa distinguirla de la *variación consecutiva*, por ejemplo, para conocer la segunda derivada de una función es necesario conocer la primera derivada y, ésta a su vez requiere de la función; este tipo de enfoque sobre la variación $f^{(n)} \leftrightarrow f^{(n+1)}$ es favorecido por la matemática escolar tradicional o procedimental a través de la significación de la derivada como el límite de un cociente incremental,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

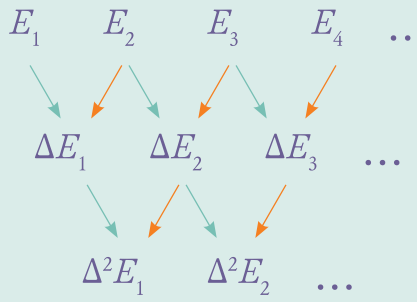
mientras que, hablar de variación sucesiva se refiere a la articulación de los órdenes de variación —explicar el estado futuro a través de articular los estados previos, el primer orden de variación o primeras diferencias, el segundo orden de variación o segundas diferencias y así sucesivamente—, (Figura 1). Consideremos un ejemplo sencillo, si E_1, E_2 y E_3 corresponden a las medidas tomadas a la altura de un árbol durante tres años, entonces E_2-E_1 informa el crecimiento que sufrió el árbol del primer al segundo año, mientras que E_3-E_2 informa el crecimiento del segundo al tercer año; de manera general, el primer orden de variación informa sobre

[1] Contraria a la postura de otros enfoques teóricos que privilegian la identificación de los objetos formales en "contextos extra-matemáticos".
[2] Representación gráfica que mide el voltaje con respecto al tiempo en los procesos de contracción y de relajación cardíaca.

[3] El pensamiento y lenguaje variacional han acompañado la constitución y la evolución de la Teoría Socioepistemológica. Éstos tienen una doble acepción, por un lado, una línea de investigación interesada en estudios socioculturales sobre la construcción y la apropiación articulada de las nociones de cambio, variación y predicción; por otro lado, una forma particular de pensamiento matemático presente en el análisis de situaciones de cambio.

el comportamiento creciente, decreciente o constante que tiene un fenómeno. Ahora bien, la tipificación del crecimiento (cada vez más, cada vez menos o siempre igual) se determina analizando el segundo orden de variación; obteniendo así, información cada vez más específica de la situación, en tanto que se articulen mayores órdenes de variación.

FIGURA 1. VARIACIÓN SUCESIVA



Sucesión de estados del fenómeno

Primero orden de variación. Descripción, tipificación o explicación del fenómeno a través de la articulación de la sucesión de estados y la sucesión de las primeras diferencias de los estados.

Segundo orden de variación. Descripción, tipificación o explicación del fenómeno a través de la articulación de la sucesión de estados, la sucesión de las primeras diferencias de los estados y la sucesión de segundas diferencias de los estados

Fuente: Elaboración propia

Así, la Derivada como concepto no es, a primera instancia, lo que se debe introducir en el aula de matemáticas, sino la noción de comparación y predicción como prácticas que le signifiquen. Esta propuesta surge (Cantoral, 1990, 1991) bajo la idea fundacional de articular la predicción —noción esencial de las ciencias experimentales— con las conceptualizaciones formales de la Matemática, particularmente, lo analítico.

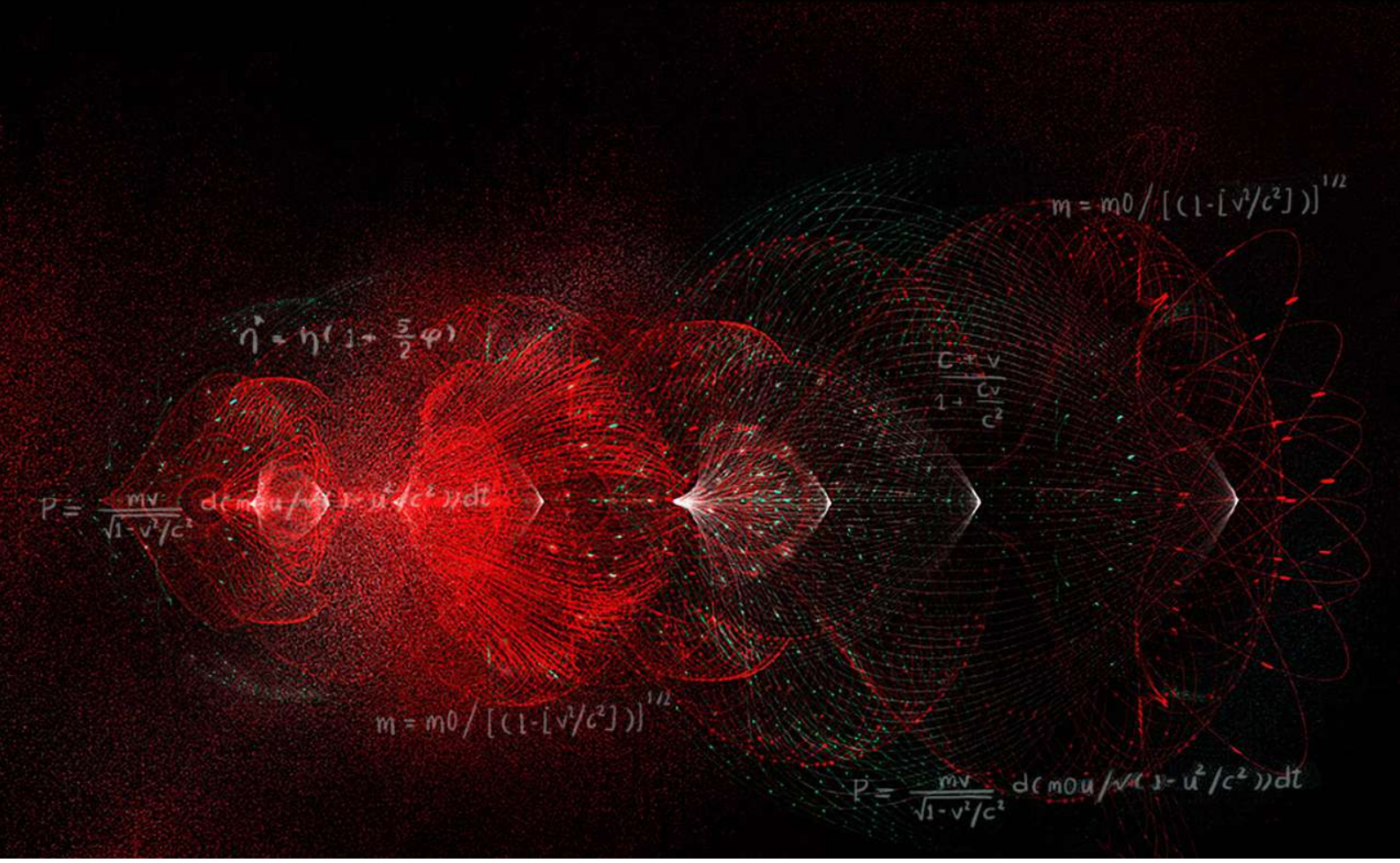
Idea fundacional. La articulación de la *predicción* –noción esencial de las ciencias experimentales– y lo *analítico* –noción propia de las Matemáticas–, permite conocer el estado inicial del sistema x, $f(x)$, y $f'(x)$, ... lo que permite conocer el estado posterior $f(x+h)$.

Por ejemplo: En la serie de Taylor, la práctica de predecir acompaña la construcción de la noción de variación

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)h}{1!}+\frac{f''(x)h^2}{2!}+\cdots$$

La consideración de la variación sucesiva como elemento esencial en el binomio predecir-comparar permitió a las investigaciones de las últimas décadas diversificar los escenarios de significación. Esto también es parte de la fundamentación de nuestra investigación, pues analizamos el uso de la variación sucesiva en la interpretación de electrocardiogramas durante el diagnóstico de enfermedades cardíacas. Este análisis fue desarrollado a través de un estudio etnográfico en el Servicio de Cardiología del Hospital Universitario “Manuel Ascunce Domenech” en Camagüey, Cuba.

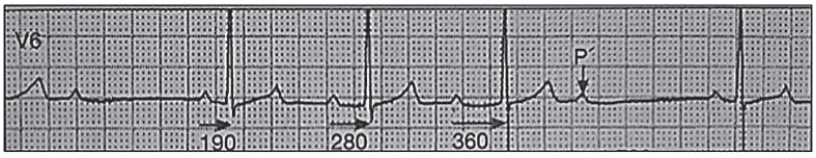
Es importante mencionar también que la realización de esta investigación amplía la naturaleza de las situaciones estudiadas por el pensamiento y lenguaje variacional, pues se entiende el análisis del cambio con fines predictivos en escenarios deterministas hacia los no deterministas.



EL USO DE LA VARIACIÓN SUCESIVA EN LA INTERPRETACIÓN DE ELECTROCARDIOGRAMAS

Para ejemplificar el uso de la variación sucesiva en el diagnóstico de enfermedades cardíacas, recurrimos a los bloqueos en la conducción del impulso eléctrico en la zona auriculoventricular –en adelante, Bloqueo AV, BAV (figura 2)– como la enfermedad a diagnosticar. Presentamos el diálogo con un cardiólogo sobre un caso de BAV y la caracterización que presentan los libros; en ambos, analizamos los argumentos sobre la cuantificación del cambio que sustentan tal diagnóstico.

FIGURA 2. ELECTROCARDIOGRAMA DE BAV GRADO II MOBITZ I



Fuente: Castellano y Attie (2004)

El uso de la variación sucesiva en la caracterización institucional de Bloqueos AV

> Las características electrocardiográficas del BAV tipo Mobitz I son: a) prolongación progresiva del intervalo PR; b) disminución progresiva del incremento del intervalo PR de latido a latido; c) disminución del intervalo RR; d) la pausa producida por la onda P bloqueada es menor a la suma de dos intervalos PP y es igual a la suma de dos intervalos PP menos la suma total de los incrementos de conducción, y e) el intervalo RR producido después de la pausa es mayor que el último intervalo RR producido antes de la onda P bloqueada (Lobelo, et al. 2001, p. 2126. Énfasis por la autora).

Observemos que, la identificación del enlentecimiento en la conducción de los estímulos eléctricos es necesario para este diagnóstico. El apartado a) indica una prolongación progresiva de este intervalo PR –correspondiente a la identificación de un comportamiento creciente– y además, se especifica en el apartado b) una disminución en el incremento –identificando así un comportamiento creciente cada vez menor. Por ejemplo, en la figura 1 los valores del intervalo PR (señalados con flechas) son 190, 280 y 360 milisegundos correspondientes a tres latidos del corazón consecutivos; ahora, cuantificando el cambio, notamos que la duración es mayor en cada latido, pero ¿qué tanto crece? la duración del segundo latido es 90 milisegundo más grande que la del primero, mientras que la duración del tercer latido es 80 milisegundo más grande que el segundo, de donde el comportamiento global es de crecimiento cada vez menor.

Mayor detalle sobre la confluencia entre distintas caracterizaciones para el BAV se pueden consultar en (Moreno-Durazo y Cantoral, 2017), en donde mostramos que aún cuando las condiciones o las características parecieran no ser iguales tienen en el fondo el mismo análisis sobre el cambio.

El uso de la variación sucesiva a través de las prácticas y los argumentos en el diagnóstico

Durante el estudio etnográfico, retomamos el diagnóstico de los bloqueos auriculoventriculares y nos centramos en los argumentos para su diagnóstico a través de la interpretación de electrocardiogramas. En la *tabla 1* mostramos los argumentos emergentes en la entrevista con el cardiólogo, donde plantea un escenario en el diagnóstico de un BAV grado II Mobitz I, asignando valores para la duración del intervalo PR.

TABLA 1. ARGUMENTOS SOBRE EL DIAGNÓSTICO DE BAV GRADO II MOBITZ I

Cardiólogo: cada prolongación es menor que la que le antecede. O sea, él arranca en 0.20 —se prolonga a 0.24— el otro se prolonga; o sea, aumentó 4 centésimas de segundo
Cardiólogo: el siguiente ya no sería 0.28 sino sería 0.26. Esto es exacto, esto siempre es exacto
Investigadora: el incremento ¿debe ser menor que 4? Puede ser
Cardiólogo: no, no; menor que 4, pero nunca más. Pero eso tiene una explicación matemática y de las células, desde el automatismo de la célula

Fuente: Extracto de las entrevistas iniciales

Antes de proporcionar el valor numérico que tendría el intervalo PR en el tercer latido, el cardiólogo calcula cuál es la diferencia entre los valores del intervalo PR del primero y del segundo latido; de manera que, el valor de la diferencia entre el segundo y el tercero debe ser menor (tabla 2). Con esto, el cardiólogo alude a la variación sucesiva hasta segundo orden, pues analiza el cambio en la duración del intervalo y también, el cambio del cambio; entonces, el primer orden corresponde al "crecimiento en el valor" del intervalo PR y el segundo orden se presenta al tipificar el crecimiento como "cada vez menor".

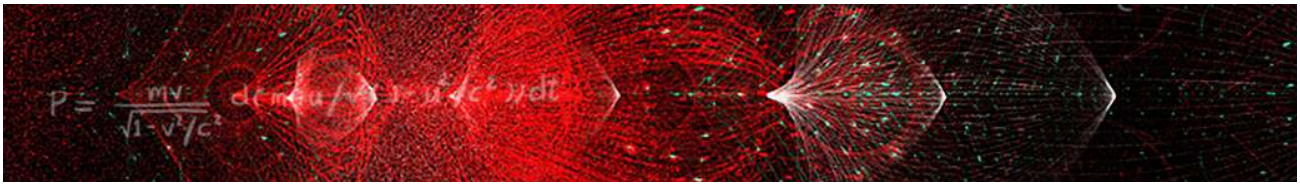


TABLA 2 ANÁLISIS DEL INTERVALO PR EN UN CASO DE BAV GRADO II MOBITZ I

Intervalo PR (primer latido)	**Intervalo PR** (segundo latido)	**Intervalo PR** (tercer latido)
0.20 s	0.24 s	X (después del cálculo propone 0.26 s)
0.04 s (diferencia en el intervalo PR del primer y segundo latido)	Incremento < 0.04 s (después del cálculo se propone 0.02 s)	

Fuente: Elaboración propia

Ejemplos más detallados sobre el uso de la variación sucesiva en la interpretación de electrocardiogramas pueden consultarse en (Moreno, 2018; Cantoral, Moreno-Durazo y Caballero-Pérez, 2018).

REFLEXIONES HACIA EL ÁMBITO EDUCATIVO

Particularmente, encontramos en la Cardiología un ejercicio de referencia que permite la resignificación de la variación sucesiva en la determinación de prácticas predictivas (predicciones, estimaciones, inferencias, entre otras). Los argumentos que siguen los cardiólogos para referirse al cambio y al cambio del cambio, tienen una naturaleza similar a aquella en la que el sentido simbólico corresponde a expresiones diferenciales como: dy, d^2y, d^3y, ya que $d^2y = d(dy)$ y $d^3y = d(d^2y) = d(d(dy))$. Es importante reconocer que, bajo este enfoque, la variación sucesiva alude a especificaciones cada vez más refinadas sobre el comportamiento del fenómeno, según el orden de variación utilizado.

Entonces, en la tabla 3 incluimos a la cardiología en los escenarios de significación propuestos por Cantoral (2004).

TABLA 3. SIGNIFICACIÓN DE LA VARIACIÓN SUCESIVA

Cálculo	**Física**	**Geometría**	**Cotidiano**	**Cardiología**
$f(x)$	Posición	Ordenada	Estatura: pequeño, mediano, grande	Medida del intervalo RR
$f'(x)$	Velocidad	Pendiente	Noción de crecimiento	Prolongación del intervalo latido a latido
$f''(x)$	Aceleración	Concavidad	Cantidad de crecimiento	Disminución en la prolongación latido a latido
Fuente: Cantoral (2004)				Fuente: (Moreno, 2018)

Esta base de significaciones para la variación fue utilizada en las sesiones del taller *Desarrollo del Pensamiento Matemático. Estrategias para jóvenes de Talento Media Superior*, donde participaron mujeres talentosas del bachillerato mexicano[4]. En esa ocasión, concretamos en tres sesiones de trabajo el estudio de la variación sucesiva (hasta segundo orden de variación), a través de situaciones de llenado de recipientes, situaciones de desplazamiento con variación en la velocidad y la interpretación del electrocardiograma (caso expuesto anteriormente). Las jóvenes identificaron la transversalidad del saber —a partir de las prácticas de comparación, seriación, estimación y predicción— y articularon las tres situaciones mediante la variación sucesiva. Los argumentos emergentes de las situaciones de movimiento y llenado corresponden con su contexto, más aún, les fueron de utilidad para explicar el cambio en el escenario médico y establecer analogías entre una persona que se desplaza a velocidad cada vez menor, un recipiente con forma de cono que es llenado a flujo constante (la altura crece cada vez menos) y el bloqueo auriculoventricular grado II Mobitz I.

[4] Colaboración realizada con el Programa Interdisciplinario sobre Política y Práctica Educativa (PIPE–CIDE) durante la edición Mujeres D.F. en 2016.

La discusión hasta aquí realizada corresponde a un ejemplo de la funcionalidad y la transversalidad del conocimiento, que como mencionan Farfán y Simón (2017) son aspectos necesarios en el aula de matemáticas para contrarrestar aspectos de desigualdad de género. Más aún, mostramos algunos elementos esenciales relativos al Pensamiento y lenguaje variacional para construir escenarios que evidencien la contextualidad, la funcionalidad y la transversalidad del saber —elementos del aula extendida (Cantoral, 2013)—, es decir, la variación sucesiva, el binomio comparación-predicción, las prácticas que acompañan la construcción de la variación y otras más.

CONSIDERACIONES FINALES

La caracterización del uso de la variación sucesiva en la práctica médica del cardiólogo es un resultado relevante en el ámbito educativo, al proporcionar rutas de rediseño del discurso matemático escolar. En un sentido, potencia el estatus de la variación sucesiva no solo como herramienta para la significación de la derivada (Cantoral y Farfán, 1998), sino como un elemento primordial en la toma de decisiones frente a situaciones de cambio inesperado. Por otro lado, con base en esta investigación, se identifica una manera en la que la abducción —habitualmente no considerada en las clases de matemáticas, pero sí parte del pensamiento matemático— participa en los procesos de análisis variacional donde se significan los objetos matemáticos formales del cambio.

Además, conlleva un aporte teórico relevante dentro de la línea de investigación acerca del pensamiento y lenguaje variacional, pues logra articular los conceptos asociados al estudio del cambio con fines predictivos en situaciones deterministas —es decir, que siguen leyes de cambio— con elementos emergentes al analizar situaciones no deterministas; brindando así, una postura sobre las formas de pensamiento matemático que se ponen en juego en situaciones de naturaleza diversa.

Un resultado principal que no forma parte de la discusión desarrollada en este artículo, pero sí es importante resaltar, es que con base en nuestra investigación se identificó y caracterizó un principio del pensamiento matemático, el principio Estrella, presente en las predicciones, inferencias o anticipaciones que realizan los individuos a través del análisis de la pequeña variación; lo cual puede consultarse en (Moreno, 2018). Lo que en general se puede entender como el análisis de las causas y los efectos en la toma de decisiones, en Matemáticas, tiene mecanismos propios sobre la variación y el razonamiento abductivo.

BIBLIOGRAFÍA

Cantoral, Ricardo. *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Barcelona: Gedisa, 2013.

Cantoral, Ricardo y Farfán, Rosa María. "Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis". *Epsilon* vol. 42, (1998): 353-369.

Cantoral, Ricardo, Moreno–Durazo, Angélica. y Caballero–Pérez, Mario. "Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning". *ZDM Mathematics Education* vol. 50, núm.1, (primavera 2018): 77-89. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8

Castellano, Carlos y Attie, Fause. "Bloqueos atrioventriculares", en *Electrocardiografía clínica*. Madrid: Elsevier, 2004.

Farfán, Rosa María y Simón, María Guadalupe. "Género y matemáticas: una investigación con niñas y niños talento". *Acta Scientiae*, vol.19, núm.3 (Verano 2017): 427-446.

Lobelo, R., Hernández, A., González, J. y Moro, C. "Bloqueo Aurículo-Ventricular". *Medicine* vol.8, núm. 40, (2001): 2125-2131.

Moreno, Gloria Angélica. "Principios del pensamiento matemático: el principio estrella en la práctica médica. El uso de la pequeña variación en el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardiacas". Tesis doctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, 2018. https://www.researchgate.net/publication/327571578_Principios_del_pensamiento_matematico_el_principio_estrella_en_la_practica_medica_El_uso_de_la_pequena_variacion_en_el_diagnostico_y_el_tratamiento_de_enfermedades_cardiacas

Moreno–Durazo, Angélica y Cantoral, Ricardo. "El uso de los órdenes superiores de variación en la interpretación clínica del electrocardiograma". En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, ed. Luis Serna y Daniela pp. 927-935. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2017.

